数 学 B

（80 分）

注意　解答を導くための過程も解答用紙に書きなさい。
解答用紙の裏面に解答を記入してはいけません。

数 学 B

注意　解答を導くための過程も解答用紙に書きなさい。
　　　解答用紙の裏面に解答を記入してはいけません。

1　（配点 35）

a は 0 でない実数とする。2 次関数 $f(x) = ax^2 + 2x + 1$ について，次の問いに答えなさい。

(1) $y = f(x)$ のグラフの頂点 A の座標を a を用いて表しなさい。

(2) a が 0 を除くすべての実数値をとって変化するとき，頂点 A の軌跡の方程式を求めなさい。

(3) 原点 O に対して，線分 OA の長さの最小値とそれを与える a の値を求めなさい。

2　（配点 30）

次の [A]，[B] のうちから，いずれか 1 つを選んで解答しなさい。

[A] 4 桁の自然数 n において，千の位の数を a，百の位の数を b，十の位の数を c，一の位の数を d とするとき，次の問いに答えなさい。

(1) m, q を自然数，r を整数とし，$n = mq + r$ とするとき，次の命題が成り立つことを証明しなさい。

　　命題「n が m の倍数ならば，r は m の倍数である」

(2) m, q を自然数，r を整数とし，$n = mq + r$ とするとき，次の命題が成り立つことを証明しなさい。

　　命題「r が m の倍数ならば，n は m の倍数である」

(3) n を a, b, c, d を用いて表しなさい。

(4) $-a + b - c + d$ が 11 の倍数ならば，n は 11 の倍数であることを証明しなさい。

[B] 次の問いに答えなさい。

(1) A チームと B チームでゲームを行なう。1 回のゲームにおいて，A チームが勝つ確率は $\frac{2}{3}$，B チームが勝つ確率は $\frac{1}{3}$ であり，引き分けはないものとする。このゲームを繰り返し行ない，どちらかが先に 3 勝した時点でそのチームの優勝とする。このとき，A チームが優勝する確率を求めなさい。

(2) A チーム，B チーム，C チームでゲームを行なう。1 回のゲームにおいて，A チームが勝つ確率は $\frac{1}{2}$，B チームが勝つ確率は $\frac{1}{3}$，C チームが勝つ確率は $\frac{1}{6}$ であり，引き分けはないものとする。このゲームを繰り返し行ない，いずれかのチームが先に 3 勝した時点でそのチームの優勝とする。このとき，A チームが優勝する確率を求めなさい。

3　（配点 35）

次の問いに答えなさい。ただし，必要ならば

$$0.301 < \log_{10} 2 < 0.302, \quad 0.477 < \log_{10} 3 < 0.478, \quad 0.845 < \log_{10} 7 < 0.846$$

が成り立つことは証明なしに用いてよいとする。

(1) 2^{78} の桁数を求めなさい。

(2) 2^{78} と 3^{50} ではどちらが大きいか，理由とともに答えなさい。

(3) (2) で答えた大きい方の値を X とし，$Y = 2^{78} + 3^{50}$ とする。このとき，X と Y の桁数は同じであるか否か，理由とともに答えなさい。また，Y の最高位の数を求めなさい。

受験番号	

数学B　解答用紙　（3枚中　その1）

得　点

1

受験番号	

数学B　解答用紙　（3枚中　その2）

2　解答する問題の記号（A または B）を右の欄へ記入しなさい。
※正しく記入していない場合は採点されないことがあります。

受験番号	

数学B　解答用紙　（3枚中　その3）

3

数学 B（後期日程）　解答と出題意図

※各大問の出題意図と各問の解答を公表する．ただし，各問とも解答を導出するプロセスには，いくつものバリエーションがあるので，最終的に求める解のみを公表する．
なお，実際の採点では解答を導出するプロセスや記述の論理を重視している．

$\boxed{1}$（出題意図）

2次関数のグラフや軌跡に関する問題である．放物線の頂点の求め方や軌跡の求め方に関する基本事項が身に付いているかを問う．

（解答）

(1)　$\mathrm{A}\left(-\dfrac{1}{a},\ 1-\dfrac{1}{a}\right)$

(2)　直線 $y=x+1$　ただし，点$(0,1)$を除く

※「$y=x+1\ (x\neq 0)$」でも可

(3)　最小値$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　$a=2$

$\boxed{2}$ [A]（出題意図）

整数の性質に関する問題である．倍数の関する基本事項と，与えられた条件から誘導に従って結論を導く力が備わっているかを問う。

（解答）

(1)　**（略証）**

$n=mk$（kは整数）とすると，$n=mq+r$ と合わせて，

$$mk=mq+r \quad \text{すなわち} \quad r=m(k-q)$$

$k-q$ は整数であるから，r は m の倍数である．

(2)　**（略証）**

$r=ml$（lは整数）とすると，$n=mq+r$ と合わせて，

$$n=mq+ml \quad \text{すなわち} \quad n=m(q+l)$$

$q+l$ は整数であるから，n は m の倍数である．

(3)　$n=1000a+100b+10c+d$

(4)　**（略証）**

$-a+b-c+d=11m$ とおく．(3)より $n=1000a+100b+10c+d$ であるから，

$$\begin{aligned} n &= 1001a+99b+11c+(-a+b-c+d) \\ &= 11\times 91a+11\times 9b+11c+11m \\ &= 11(91a+9b+c+m) \end{aligned}$$

$91a+9b+c+m$ は整数であるから，n は 11 の倍数である．

$\boxed{2}$ [B]（出題意図）

反復試行の確率に関する問題である．反復試行の確率についての基本的な計算力が身に付いているかを問う．また，場合分けなどを用いて問題を正しく整理して考える力を問う．

（解答）

(1) $\dfrac{64}{81}$　　　(2) $\dfrac{23}{36}$

$\boxed{3}$ （出題意図）

指数の形で与えられた大きな数について，常用対数を用いる方法に関する理解力を問う．また，与えられた $0.301< \log_{10} 2 < 0.302$ などの不等式を用いて大小を比較する論証力や，最高位の数値に着目する洞察力など，総合的な力が備わっているかを問う．

（解答）

(1) 24 桁

(2) 3^{50} の方が大きい

（理由の要点）

2^{78}，3^{50} について，それぞれ常用対数をとり，与えられた不等式を用いて評価を行うと，

$$10^{23.478} < 2^{78} < 10^{23.556}, \qquad 10^{23.85} < 3^{50} < 10^{23.90}$$

であることが示されるので，3^{50} の方が大きいことがわかる．

（※その他，論理的に正しい理由が述べられている場合は同等に評価している．）

(3) X と Y の桁数は異なる（Yの桁数の方が 1 つ大きい），

Y の最高位の数：1

（理由の要点）

2^{78}，3^{50} について，それぞれ最高位の数を考えると，

$$3 \times 10^{23} < 2^{78} < 4 \times 10^{23}, \qquad 7 \times 10^{23} < 3^{50} < 8 \times 10^{23}$$

であることが示される（2^{78}, 3^{50}の最高位の数はそれぞれ 3, 7 であることが分かる）．これより，

$$1 \times 10^{24} < 2^{78} + 3^{50} < 1.2 \times 10^{24}$$

であるから，$X = 3^{50}$ は 24 桁，$Y = 2^{78} + 3^{50}$ は 25 桁となり，桁数は異なる．

また，$Y = 2^{78} + 3^{50}$ の最高位の数は 1

（※その他，論理的に正しい理由が述べられている場合は同等に評価している．）